# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

INTORNO AD UNA FORMOLA DI INTERPOLAZIONE.

— **SUR UNE FORMULE D'ANALYSE**. Giornale di Crelle. T. 53. pag. 286.

LEMMA. Le $n^2$ quantità $\alpha_{r,s}$ sieno legate ad altre $n^2$ quantità $a_{r,s}$ dalle $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni :

$$\alpha_{r,1}\, a_{s,1} + \alpha_{r,2}\, a_{s,2} + \ldots + \alpha_{r,n}\, a_{s,n} = 0$$

$$\alpha_{r,1}\, a_{r,1} + \alpha_{r,2}\, a_{r,2} + \ldots + \alpha_{r,n}\, a_{r,n} = a_r \,.$$

Siccome indicando con H il determinante :

$$\sum(\pm\, a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n})$$

deducesi dalle medesime :

$$\alpha_{r,s} = \frac{a_r}{\mathrm{H}} \frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}a_{r,s}}$$

si avranno anche le seguenti :

$$\frac{1}{a_1}\alpha_{1,r}\, a_{1,s} + \frac{1}{a_2}\alpha_{2,r}\, a_{2,s} + \ldots + \frac{1}{a_n}\alpha_{n,r}\, a_{n,s} = 0$$

$$\frac{1}{a_1}\alpha_{1,r}\, a_{1,r} + \frac{1}{a_2}\alpha_{2,r}\, a_{2,r} + \ldots + \frac{1}{a_n}\alpha_{n,r}\, a_{n,r} = 1 \,.$$

Sieno $f(x)$ , $\varphi(x)$ due polinomj rispettivamente dei gradi $n, n-1$ e non aventi fattori comuni. Supponiamo che sviluppando in frazione continua la frazione $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ottengasi :

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

e che :

$$\frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{D}_1}, \quad \frac{\mathrm{N}_2}{\mathrm{D}_2}, \ldots\ldots \frac{\mathrm{N}_{n-1}}{\mathrm{D}_{n-1}}$$

sieno le ridotte successive di questa frazione continua. Indicando con $r_1$ , $r_2$ . . . . . i

residui della divisione, e con $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ le radici dell'equazione $f(x)=0$, si ha come è noto:

$$r_s(x) = (-1)^s (\varphi D_s - f N_s)$$

e quindi:

$$(1) \qquad r_s(x_r) = (-1)^s \varphi(x_r) D_s(x_r).$$

Ora i polinomj $r_s$, $D_s$ essendo rispettivamente dei gradi $n-s-1$, ed $s$ si avranno le equazioni:

$$\sum_1^n{}_r \frac{r_s(x_r)}{f'(x_r)} = 0 \qquad \sum_1^n{}_r \frac{r_s(x_r)D_i(x_r)}{f'(x_r)} = 0 \quad \text{per} \quad i < s$$

$$\sum_1^n{}_r \frac{r_s(x_r)D_s(x_r)}{f'(x_r)} = (-1)^s \frac{1}{\alpha_{s+1}}$$

essendo $\alpha_{s+1}$ il coefficiente di $x$ nel quoziente $q_{s+1}$; ossia per la (1):

$$\sum_1^n{}_r D_s(x_r) \frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)} = 0, \quad \sum_1^n{}_r D_i(x_r)D_s(x_r) \frac{\varphi(x_r)}{f'(x_r)} = 0, \quad \sum_1^n{}_r D_s^2(x_r) \frac{\varphi(x_r)}{f'(x_s)} = (-1)^s \frac{1}{\alpha_{s+1}}.$$

Applicando a questo caso il Lemma superiore si ottengono le relazioni:

$$\alpha_1 - \alpha_2 D_1(x_r) D_1(x_s) + \alpha_3 D_2(x_r) D_2(x_s) - \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_n D_{n-1}(x_r) D_{n-1}(x_s) = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 D_1^2(x_r) + \alpha_3 D_2^2(x_r) - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}\alpha_n D_{n-1}^2(x_r) = \frac{f'(x_r)}{\varphi(x_r)}$$

dalle quali deducesi facilmente:

$$\alpha_1 \sum_s{}_s \psi(x_s) \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)} - \alpha_2 D_1(x_r) \sum_s{}_s \psi(x_s) D_1(x_r) \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)} + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} \alpha_n D_{n-1}(x_r) \sum_s{}_s \psi(x_s) D_{n-1}(x_s) \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)} = \psi(x_r);$$

e supponendo $\psi(x)$ di grado $< n$, dividendo per $(x-x_r)f'(x_r)$ e sommando giungesi alla formola d'interpolazione:

$$\psi(x) = \alpha_1 \sum_s{}_s \psi(x_s) \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)} - \alpha_2 D_1(x) \sum_s{}_s \psi(x_s) D_1(x_s) \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)} + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} \alpha_n D_{n-1}(x) \sum_s{}_s \psi(x_s) D_{n-1}(x_s) \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)}.$$

Questa formola coincide con quella enunciata dal Sig. Tchebichef ponendo

$$\varphi(x) = f'(x).$$

Prof. F. Brioschi.